Revue Internationale des Sciences de Gestion
ISSN: 2665-7473
Volume 5 : Numéro 3

Création de valeur entre les compagnies d'assurance des risques industriels majeurs : Cas de la double explosion du port de Beyrouth - Liban

Value creation between insurance companies for major industrial risks: Case of the double explosion of the Beirut port - Lebanon

BELLOUQ Chouaib
Doctorant
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Rabat
Université Mohammed V
Laboratoire d'Analyse Économique et de Modélisation
(LEAM)
Maroc
chouaib_bellouq@um5.ac.ma

Date de soumission : 06/06/2022

Date d'acceptation : 01/08/2022

Pour citer cet article :

BELLOUQ. C (2022) « Création de valeur entre les compagnies d'assurance des risques industriels majeurs : Cas de la double explosion du port de Beyrouth - Liban », Revue Internationale des Sciences de Gestion «Volume 5 : Numéro 3» pp : 733 - 751

Résumé

Le présent article évalue l'ensemble des contrats d'assurance optimaux au sens de Pareto et le cœur d'un jeu d'assurance. L'approche adoptée permet à plusieurs assureurs de profiter d'une réassurance, avec des préférences invariantes, qui couvre les risques industriels majeurs en cas de survenance. Nous caractérisons les traités Pareto-optimaux, qui déterminent la forme des indemnités. Pour ce faire, nous avons adopté le cas du Liban : la double explosion du port de Beyrouth. Des solutions sous forme fermée et numériques sont trouvées pour diverses préférences que les acteurs de l'assurance pourraient avoir. Ces contrats optimaux robustes sont étudiés et nous, ce qui est un problème clé de prise de décision dans l'incertitude.

Aux fins de la pratique, notre échantillon se compose de trois compagnies d'assurance, qui envisagent la conclusion d'un traité d'échange de risques. Nous montrons comment déterminer les contrats de réassurance optimaux au sens de Pareto mutuellement acceptables parmi ceux disponibles, de sorte que l'objectif des compagnies en termes de création de valeur peut être atteint dans le cadre des contrats de réassurance optimaux au sens de Pareto mutuellement acceptables.

Mots clés : « assurance » ; « contrat Pareto-optimal » ; « incertitude » ; « risque majeur » ; « traité d'échange de risques ».

Abstract

The present article evaluates the set of Pareto optimal insurance contracts and the heart of an insurance game. The approach adopted allows several insurers to benefit from reinsurance, with invariant preferences, which covers major industrial risks in the event of an occurrence. We characterize the Pareto-optimal treaties, which determine the form of the indemnities. To do this, we have adopted the case of Lebanon: the double explosion of the port of Beirut. Closed-form and numerical solutions are found for various preferences that insurance players might have. These robust optimal contracts are studied and we, which is a key problem of decision-making under uncertainty.

For practical purposes, our sample consists of three insurance companies, which are considering entering into a risk exchange treaty. We show how to determine the mutually acceptable Pareto-optimal reinsurance contracts among those available, so that the companies' objective in terms of value creation can be achieved within the framework of the mutually acceptable Pareto-optimal reinsurance contracts.

Keywords :"insurance" ; "Pareto-optimal contract" ; "uncertainty" ; "major risk" ; "risk exchange agreement".

Introduction

Le marché de l'assurance se caractérise par l'incertitude. L'assurance peut être considérée comme un moyen pour lutter contre cette incertitude ou, du moins, pour réduire les risques inhérents à celle-ci. C'est donc une prévention contre les risques que peut présenter un mauvais état de la nature notamment lorsqu'il s'agit de risque majeur (incendie, explosion, séisme...). Ce mauvais état caractérisé par une très faible probabilité d'occurrence et un impact financier important serait difficile à supporter non seulement du côté de l'assuré mais également du côté de l'assureur. Buhlmann, H. (1970) confirme que les développements modernes de la théorie du risque découlent en grande partie des problèmes qui se posent dans la transaction d'assurance non-vie. C'est pourquoi les assureurs ont recours à la mutualisation des risques, une opération interne qui consiste pour les assureurs à couvrir ensemble, un même risque. En d'autres termes la mutualisation des risques réside en la répartition du coût de la survenance d'un sinistre entre les affiliés d'un grand assujetti éventuellement au même risque. Chaque an, les assureurs réunissent les primes de tous les assurés et les emploient pour indemniser ceux qui n'auront pas eu de chance et auront supporté un sinistre. Ce processus, dont les assurés n'ont pas de connaissance, est une mesure de précaution que de nombreux assureurs décident de prendre afin de limiter les montants des indemnités. Depuis que Karl Henrik Borch a publié ses célèbres articles fondateurs, le problème de réassurance a été abordé par de nombreux auteurs et sous de nombreux risques différents. Notre objectif est de projeter et se baser sur ces recherches pour le cas des risques majeurs.

La double explosion dramatique du port de Beyrouth du 04 Août 2020 est parmi les exemples concrets des risques majeurs survenus récemment et qui ont engendré des dégâts massifs non seulement corporels mais aussi matériels. « En tant qu'assureurs, nous n'avons jamais fait face à une telle catastrophe », affirme un professionnel du secteur, qui préfère ne pas être cité. Une situation qui, étant donné les sommes engagées, risquait de mettre en grande difficulté les compagnies d'assurance. D'importantes pertes matériels que les assureurs sont appelés à payer à Beyrouth. Pour y remédier, les compagnies d'assurance prévoient l'intervention de leurs réassureurs.

Tout cela nous pousse à poser les questions principales : y-a-il un marché de mutualisation des risques majeurs ? Quelle est la structure de ce marché ? Est-ce qu'il est concurrentiel ? Est-ce qu'il est oligopolistique ? Est-ce qu'il y a des coopérations particulières entres les assureurs étant donné le type particulier du risque ? Coopération optimale : comment n compagnies d'assurance doivent-elles répartir un risque donné pour minimiser la prime totale ? Les assurances vont-elles sortir du dilemme où elles se trouvent depuis la catastrophique explosion qui a ravagé le fameux port ?

La première partie sera consacrée à la mise en œuvre de l'importance de la mutualisation des risques dans le processus de gestion des risques, en comparant la situation des compagnies d'assurance avant et après signature des traités d'échange de risques. Nous avons tout d'abord commencé par la définition du concept d'équilibre économique dans l'incertitude, ensuite l'introduction de la revue de littérature qui définit les traités Pareto-optimaux. Nous expliquons également comment on peut lier la littérature récente à croissance rapide sur les critères d'optimalité basés sur le risque au critère d'optimalité de Pareto.

Dans la deuxième partie nous avons illustré la situation difficile vécue par les assureurs des pertes survenus au niveau du port de Beyrouth ainsi que toute la ville. Puis nous avons proposé un traité Pareto-optimal qui permet la mutualisation des risques majeurs dans les compagnies d'assurance. Pour ce faire, nous avons étudié dans cet article la situation de trois compagnies d'assurance qui négocient en vue de conclure un traité de réassurance réciproque.

1. Revue de littérature empirique sélective

1.1. Équilibre économique dans l'incertitude du marché de l'assurance

Le concept d'équilibre économique dans l'incertitude est appliqué à un modèle de marché d'assurance où, à la différence du modèle classique de Borch, K. (1960b) d'un marché de réassurance, les échanges de risques sont autorisés entre l'assureur et chaque assuré uniquement, et non entre les assurés eux-mêmes.

Vu le nombre restreint des compagnies d'assurance dans le secteur d'assurance, la situation est donc des marchés d'oligopole. Ce dernier se distingue par une concurrence imparfaite et l'absence d'atomicité. Le marché d'oligopole revient à une situation similaire à celle du monopole : là où il y a très peu de producteurs, c'est-à-dire un nombre limité d'assurances, les assureurs ont tendance à s'entendre entre eux pour fixer des règles d'échanges de risques afin d'aboutir à un contrat optimal de réassurance. En d'autres termes, un traité supplémentaire souscrit dans cette positon ne pourrait accroître l'utilité d'une compagnie sans faire diminuer l'utilité d'au moins un partenaire. Ce qui va nous mener à fixer un contrat optimal de réassurance en élaborant un marché de jeu coopérative. Cai, J., et al. (2017) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un contrat de réassurance soit Pareto-optimal et caractérisent tous les contrats de réassurance Pareto-optimaux sous des hypothèses de modèle plus générales. Nous obtenons les conditions suffisantes qui garantissent l'existence des contrats de réassurance Pareto-optimaux.

1.2. Situation avant signature du traité d'échanges de risques

Nous prenons en compte un marché de n compagnies d'assurance $A_1, \dots, A_n$. On note par :

i : Le membre du marché représentant la compagnie d'assurance A_i, $i \in \{1, \dots, n\}$

D_i : La somme que la compagnie A_i occupe pour indemniser les sinistres.

$F_i(x_i)$: La fonction de répartition de la somme totale des sinistres pour l'ensemble du portefeuille de A_i pour toute la période considérée.

$U_i(x_i)$: La fonction d'utilité évaluant la situation de A_i

On caractérise la situation de A_i par le couple $[D_{i,} F_i(x_i)]$

$$U_i(x_i) = U_i[D_i, F_i(x_i)] = \int_0^\infty u_i(D_i - x_i)\, dF_i(x_i)$$

Où $u_i(D_i - x_i)$: l'utilité associée à une somme monétaire $D_i - x_i$.

Évidemment, toute fonction d'utilité ne s'harmonise pas pour le comportement d'un assureur. C'est pourquoi nous atténuons les effets néfastes de la situation de ces fonctions en exprimant des hypothèses qui nous permettent de donner une interprétation économique :

- Un avantage considérable est toujours favori à un avantage plus faible ;
- Chaque affilié du marché a une aversion au risque positive. Un assureur a justement toujours peur du risque (risquophobe), c'est la raison pour laquelle qu'il se réassure. Si une compagnie d'assurance a une aversion au risque négative, elle serait incitée à partager ses réserves pour reprendre les portefeuilles de ses partenaires ;
- Aucun traité de réassurance ne peut entraîner un contentement perpétuel.

Ainsi, dans la perspective de donner une justification économique à ces fonctions, les hypothèses citées, ci-dessus, se traduisent comme suit :

- $u_i(x)$ est une fonction non-décroissante de x ;
- $u_i(x)$ est une fonction concave de x ;
- $u_i(x)$ est une fonction bornée supérieurement dans un intervalle ouvert comportant $I = [-\infty, \sum_{i=1}^{n} D_i]$.

Néanmoins, Cheung, K.C., et al. (2015b) indiquent que la théorie de l'utilité a constamment été critiquée pour son incapacité à saisir la prise de décision humaine réelle, et ses lacunes motivent le développement récent de l'économie et de la finance comportementales. C'est pourquoi il est indispensable d'évaluer cette utilité en présence d'un traité de réassurance afin de déterminer le comportement des assureurs.

1.3. Situation après signature du traité d'échanges de risques

Les différents affiliés du marché viseront à accroître leur utilité en souscrivant un traité d'échange de risques :

$$\bar{y} = [y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)],$$

Où $y_i(x_1, \dots, x_n)$ est la somme que A_i doit s'acquitter si les sinistres pour les différentes compagnies d'assurance s'évaluent d'une manière respective à $x_1, \dots, x_n$.

Puisque tous les sinistres doivent être dédommagés, les $y_i(x_1, \dots, x_n)$ exigent de répondre à la condition d'admissibilité :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (a)$$

Bien entendu, cette somme représente le montant total des sinistres.

Après signature du traité d'échange de risques, l'utilité de A_i se transforme en :

$$U_i(\bar{y}) = U_i[D_i,\ F(\bar{x})] = \int_{\theta} u_i(D_i - x_i)\, dF(\bar{x}),$$

Où $\bar{x}(x_1, \dots, x_n)$, $F(\bar{x})$ est la fonction de répartition associée à $\bar{x}$ et θ représente l'orthant positif de l'espace euclidien de dimension n.

On dit que le traité $\bar{y}'$est préférable à $\bar{y}$ lorsque $\forall i \in [\![1, n]\!]\ U_i(\bar{y}') \geq U_i(\bar{y})$,

Avec le signe d'inégalité strict pour un i au moins.

La notion d'optimalité de Pareto est couramment employée pour formuler des décisions qui concilient les intérêts conflictuels de plusieurs agents avec des préférences de risque éventuellement différentes comme l'indique Lo, A. et Tang, Z. (2018).

Un traité $\bar{y}$ est dit Pareto-optimal lorsqu'il n'en existe aucun qui lui soit meilleur. Autrement dit, $\bar{y}$ est Pareto-optimal équivaut à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], U_i(\bar{y}') \geq U_i(\bar{y}) \implies \forall i \in [\![1, n]\!], U_i(\bar{y}') = U_i(\bar{y})$$

Un traité Pareto-optimal reflète un équilibre stable dans le marché. Un traité additionnel souscrit dans ces conditions ne pourrait augmenter l'utilité d'une compagnie d'assurance sans faire réduire l'utilité d'au moins un partenaire. Bien évidemment, L'assureur sélectionne le traité qui maximise son utilité espérée comme indiqué Hans U. Gerber, et al. (2013). En contrepartie, Cai, J. & Weng, C. (2016) ont étudié les traités de réassurance optimaux qui minimisent la responsabilité d'un assureur. Chaque manière de réflexion est au profit de l'assureur.

Borch (1974) a prouvé un théorème aidant à concrétiser les traités Pareto-optimaux en utilisant un ensemble de $n-1$ constantes. Toutefois, cet auteur exploite quelques propriétés de dérivabilité des fonctions d'utilité qui ne disposent d'aucune justification économique ; c'est la raison pour laquelle Lemaire, J (1977) a généralisé le théorème dans le cas d'utilités non-différentiables. En effet, ce dernier auteur a montré le théorème fondamental suivant dont nous aurons besoin par la suite :

Un traité $\bar{y}$ est Pareto-optimal si et seulement s'il existe m constantes non-négatives $k_1, k_2, \dots, k_m$ telles que, avec une probabilité 1,

$$k_i u_i'^{+}[D_i - y_i(\bar{x})] = k_1 u_1'^{+}[D_1 - y_1(\bar{x})], i = 1,2,\dots,n \qquad (b)$$

$u_i'^{+}(x)$ représentant la dérivée à droite de u_i(x).

L'énoncé a une signification parce qu'il est bien acquis que toute fonction concave et bornée dans un intervalle ouvert, accorde une dérivée à droite finie en tout point, monotone et non croissante (de la même manière qu'une dérivée à gauche).

Le théorème veut dire que le montant versé par A_{i} est en fonction uniquement de la somme des sinistres à régler sur l'ensemble du marché. II lui manque effectivement certains axiomes de partage, déterminant comment les joueurs vont diviser le profit de leur coopération. Chaque compagnie a intérêt à recevoir une constante k_i aussi grande que réalisable (conciliable avec les conditions d'admissibilité) de façon à dédommager le minimum possible et fournir une création de valeur. Le choix des constantes k_i résulte donc d'un marchandage supplémentaire, durant lequel les intérêts des joueurs seront opposés. En matière de théorie des jeux, il faut déterminer la valeur du jeu.

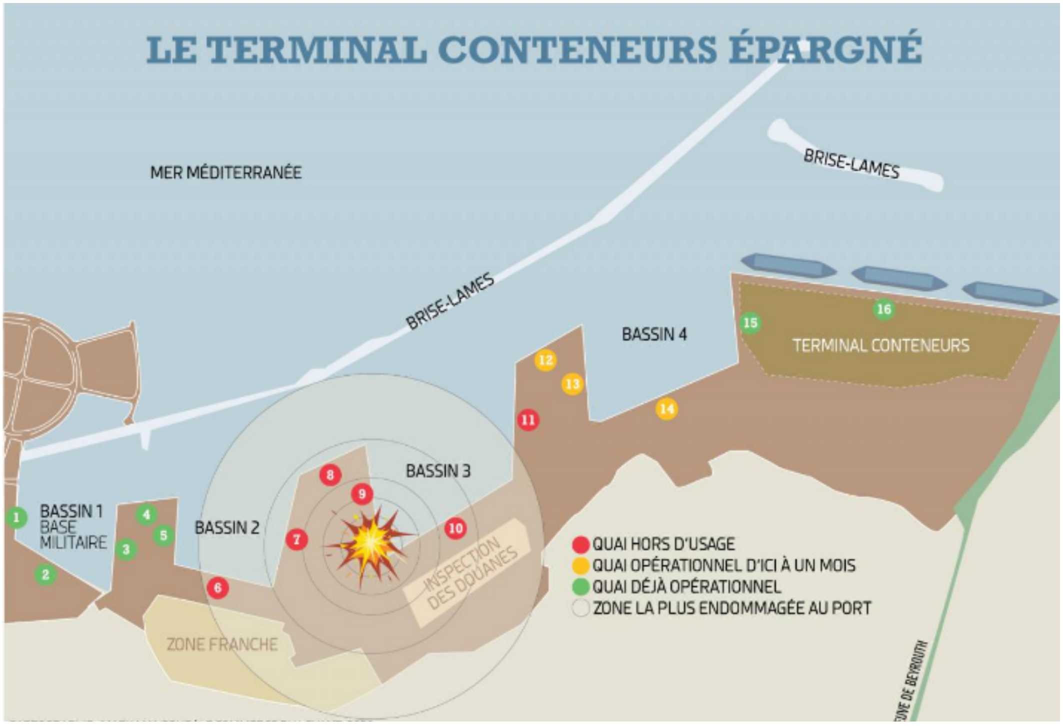
Toutes ces considérations dictent tout de même une analogie avec la théorie coopérative des jeux. Le problème forme en réalité un jeu à n joueurs à utilités non-transférables. Sous les exigences de l'énoncé, tout traité Pareto-optimal retourne à constituer un pool de tous les assureurs et décider d'une régie pour la distribution des charges : les compagnies d'assurance ont ainsi toujours intérêt à coopérer.

2. Échange de risques entre assureurs pour indemnisation des pertes du Liban

2.1. Survenance des risques industriels majeurs au port de Beyrouth

Le mardi 04 août 2020, le Liban a subi une succession de deux fortes explosions dans le port de Beyrouth. Pendant des mois et jusqu'à la veille des tragiques explosions, les messages alertant sur les dangers du stockage d'une énorme quantité de nitrate d'ammonium, à l'origine de la catastrophe, s'étaient pourtant multipliés. D'épais nuages de fumée orange se sont élevés au-dessus de la capitale. Ce sinistre, qui s'est déroulé dans le bassin n° 3, a effectivement détérioré tous les locaux positionnés dans la région, dont l'immeuble des douanes, de la même façon que les entrepôts de la zone franche du port, où étaient déposés des articles. Les quais de ce bassin comme une partie de ceux du bassin n° 2 et du n° 4 sont dorénavant endommagé (Figure 1). Ces quais servent à l'importation de la marchandise sans emballage, à savoir les voitures, les métaux, le blé, les graines, le bétail… La station de pilotage du port, se trouvant sur le quai n° 6, a quant à elle été violement détruite et ruiné trois de ses cinq remorqueurs et neuf de ses dix navires pilotes. Les vitres de nombreux immeubles et magasins ont volé en éclat.

Figure N°1 : lieu de la double explosion du port de Beyrouth



Source : Cartographie par Mark Mansour, le Commerce du Levant, 2020

La perte de la double-explosion est très grande. Le coût des dégâts provoqués par cette explosion est évalué à 15 milliards de dollars, selon le président du Liban.

Le Liban traverse une crise économique prolongée et grave. L'explosion catastrophique a accéléré le taux d'inflation dans le pays. La montée en flèche des taux d'inflation alimentaire et la forte dépréciation de la monnaie après l'explosion ont réduit le pouvoir d'achat des particuliers au Liban. Plus de 300 000 habitants ont été déplacés lors de l'inflation, qui a affecté le pouvoir d'achat des ménages (Devi, S., 2020).

2.2. Indemnisation des pertes dues à l'explosion du port de Beyrouth par voie d'échange de risques entre assureurs

Au Liban, les attentats terroristes forment des clauses d'exclusion pour les compagnies d'assurance. Tandis que l'enquête sur le motif de l'explosion déroulée en août 2020 s'enfonce. L'explosion catastrophique à Beyrouth découle de la corruption endémique au Liban (GUECHATI. I & CHAMI. M, 2022). Un grand réassureur a choisi de payer le sinistre, peu importe sa raison. Cet évènement, dont le bilan final est fixé à 215 tués et 6500 blessés, a dans la même mesure engendré des pertes économiques majeures (comprises entre 6 et 8 Md$), dont 1,2 Md € de pertes assurées. Les assureurs placés dans la zone, dont Axa et Allianz, peuvent normalement s'appuyer sur leurs programmes de réassurance pour amortir le choc. Toutefois, le droit des contrats libanais leur a sévèrement aggravé la tâche. Une exclusion impossible à reconnaitre.

Les polices d'assurance dommages au Liban comportent, en effet, systématiquement des clauses d'exclusion pour actes de guerre et de terrorisme. La formulation de polices de réassurance optimales prenant en compte diverses contraintes pratiques est un problème couramment rencontré par les praticiens (Lo, A., 2017). Mais la commission d'enquête administrative, chargée de faire la lumière sur la raison derrière l'explosion déroulée le 4 août 2020, s'enlise. Les réassureurs, qui assumeraient selon une source bien informée 95% de la charge du sinistre, se sont jusqu'ici montrés réticents à appliquer leurs couvertures étant donné l'incertitude pesant sur l'applicabilité des polices d'assurance.

Afin de ne pas créer un précédent, les grands réassureurs mondiaux SCOR, Swiss Re et Munich Re, apériteurs des programmes, avaient proposé de payer les sinistres, à condition de pouvoir récupérer les sommes versées aux assureurs si l'enquête officielle venait à conclure à un acte terroriste, et donc à la non-application des contrats d'assurance. Munich Re avait ainsi ajouté en novembre 2020 une clause de remboursement aux conditions de ses contrats de réassurance facultative. Cette dernière prévoyait que le réassureur pouvait exercer ses droits de recouvrer les sommes versées aux cédantes via une compensation sur les passifs futurs, et ce indépendamment du fait que les assureurs aient pu exiger de leurs assurés le remboursement des indemnisations.

D'autant que le droit libanais prévoit que, pour bénéficier de la clause d'exclusion, c'est à l'assureur qu'incombe la charge de la preuve et pas à l'assuré. Dix mois après l'ouverture des négociations entre assureurs et réassureurs, sous le haut patronage de l'Association des compagnies d'assurance libanaises (Acal), Munich Re a radicalement changé d'approche et ouvert une brèche dans le règlement de ce sinistre. Le réassureur, qui estimait ses pertes à au moins 100 M€, a décidé d'accompagner ses clients quelle que soit la cause de l'explosion et renonce à demander un quelconque remboursement.

Face à l'impasse dans laquelle se trouve la commission d'enquête libanaise – pour des motifs éminemment politiques – le deuxième réassureur mondial choisit de faire avancer le processus d'indemnisation. « Nous sommes prêts à payer notre part des sinistres en accord avec les termes contractuels du traité », ont-ils écrit à leurs clients il y a à peine deux semaines. Cette volte-face ouvrira-t-elle la voie aux autres réassureurs ? Ces derniers ont déjà passé des charges dans leurs comptes de l'année 2020. Sur le marché de la réassurance, ces assureurs procèdent à leurs évaluations subjectives de l'utilité et du risque des opérations financières couvertes par le traité en dérivant des classements préférentiels des différents types d'accords (D'Ortona, A. E. & Marcarelli, G., 2017). Swiss Re a ainsi provisionné 222 M$ au quatrième trimestre, tandis que SCOR avait indiqué subir une perte de 44 M€ nette de rétrocession au troisième trimestre. Hannover Re a, de son côté, indiqué lors de la publication de ses résultats annuels en 2020 avoir enregistré des pertes de 86,6 M€. Plus modestement exposé au sinistre, CCR Re, qui dispose d'un bureau à Beyrouth, a subi une charge de 24 M€ brute, dont 15 M€ nette de rétrocession."

Asimit, A.V. & Boonen, T.J. (2018) ont montré comment on peut trouver des contrats robustes et efficaces au sens de Pareto. Pour ce faire, et afin de proposer une solution remédiant aux pertes dues à la double explosion, nous étudions, pour ce qui suit, les contrats de réassurance Pareto-optimaux disponibles, pour le cas des grandes compagnies d'assurance : SCOR, Swiss Re et Munich Re.

2.3. Échange de risques entre assureurs et création de valeur

La création de valeur est la capacité qu'ont les entreprises à engendrer de la richesse ou de l'utilité, et c'est l'objectif rationnel et la raison d'être de toute compagnie d'assurance. Nous montrons à quel point l'échange de risque permettra cette création.

On note par :

$\boldsymbol{A_1}$ **:** La compagnie d'assurance SCOR,

$\boldsymbol{A_2}$ **:** La compagnie d'assurance Swiss Re,

$\boldsymbol{A_3}$ **:** La compagnie d'assurance Munich Re.

Le choix de ces trois compagnies d'assurance relève du fait qu'ils sont les principaux réassureurs mondiaux, dont la coopération s'avère faisable, en plus leur couverture des mêmes types de risques. La taille de l'échantillon de 3 nous produira une souplesse pour exploiter la revue de littérature utilisée.

Si nous supposons que les trois compagnies $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ et $\boldsymbol{A_3}$, ne sont pas obligées de parvenir à un accord, cela signifie que si les entreprises concluent un traité, celui-ci doit être tel que les trois entreprises se considèrent mieux loties que sans traité. Si nous supposons en outre qu'aucune société tierce ne peut s'introduire dans les négociations. Cela signifie que les deux sociétés doivent soit s'entendre, soit être sans aucune réassurance. Comment les trois parties parviennent à un accord dans une situation comme celle-ci, est l'un des problèmes classiques de l'économie théorique comme indique Borch, K. (1960c).

Les problèmes numériques dépendent des caractéristiques du problème d'optimisation, et nous prévoyons donc de nous concentrer sur la conception optimale de la réassurance, qui a été un sujet très dynamique au cours de la dernière décennie, comme confirme Asimit, A.V., et al. (2018).

Nous étudions l'optimalité de Pareto des accords de réassurance dans les paramètres généraux comme dans le modèle adopté par Cai, J., et al. (2017).

Nous considérons donc le situation où la fonction d'utilité de chaque compagnie d'assurance est quadratique, comme l'a traité Gerber, H.U. & Pafumi G. (1998) :

$$\boldsymbol{u_i(x) = x - a_i x^2} \qquad \forall \boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}]\!]$$

Borch, K. (1960c) a prouvé que les contrats Pareto-optimaux sont des contrats en quote-part de taux :

$$\boldsymbol{q_i = \frac{\frac{1}{k_i a_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i a_i}}} \qquad (\boldsymbol{c})$$

Où les $\boldsymbol{q_i}$ doivent satisfaire aux inégalités (Les conditions caractérisant un équilibre déployé par Golubin, A.Y. (2008)).

$$\boldsymbol{q_i \geq 0} \quad \forall \boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}]\!]$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} q_i = 1}$$

$$\boldsymbol{q_j^2 \leq \frac{\left(\frac{1}{2a_i} - R_i\right)^2 + V_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2a_i} - R_i\right)\right\}^2 + \sum_{i=1}^{n} V_i}}$$

La détermination des primes associées au contrat de Pareto optimal est un autre problème pour lequel les arguments économiques sont discutés plus en détail. Borch, K. (1962) considère une prime d'assurance et un échange de risque d'équilibre dans une économie d'échange pure avec ambiguïté ou incertitude de Knight, F. H. (1921). Après quelques années, Borch, K. (1969) a suggéré qu'un contrat de réassurance pouvait être qualifié de « plus efficace » s'il maximisait, pour une prime nette donnée, la réduction de la variance dans la distribution des sinistres.

On note par :

$\boldsymbol{P_i}$: La prime pure ;

$\boldsymbol{V_i}$: La variance de la distribution des risques de $\boldsymbol{A_i}$;

$\boldsymbol{R_i}$: La réserve $\boldsymbol{D_i - P_i}$.

Considérons l'échantillon étudié composé des trois compagnies d'assurance $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ et $\boldsymbol{A_3}$, dont les paramètres valent :

Tableau N°1 : Paramètres relatives aux compagnies A_1, A_2 et A_3.

	SCOR	**Swiss Re**	**Munich Re**
$\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{R_i}$	1	4	4
$\boldsymbol{P_i}$	1	2	2
$\boldsymbol{V_i}$	55	20	20
$\boldsymbol{a_i}$	0,01	0,05	0,05

Source : réalisé par nos soins.

Nous avons supposé, au niveau du tableau N°1, que les deux compagnies $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$, sont disposées à contribuer aux mêmes paramètres à la perte globale de autres l'autre, tel que Gerber, H.U. (1978) a adopté.

Les utilités initiales valent

$$u_i(x_i) = \frac{1}{4a_i} - a_i\left[\left(\frac{1}{2a_i} - R_i\right)^2 + V_i\right], i \in \{1, 2, 3\}$$

Donc
$$U_1(x_1) = 0{,}44$$
$$U_2(x_2) = 2{,}2$$

$$U_3(x_3) = 2{,}2$$

Ces utilités coïncident avec des quotes-parts extrémales pour A_1 :

$$q_1^{max} = 0{,}802251$$

$$q_1^{min} = 0{,}757719$$

Posons pour simplifier :

$$Y_i = \left(\frac{1}{2a_i} - R_i\right)^2 + V_i$$

$$\mathrm{Y} = \left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2a_i} - R_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} V_i\right\}$$

L'utilité après la réassurance vaut : $U_i(\bar{y}) = \boldsymbol{\frac{1}{4a_i} - a_i q_i^2}\mathbf{y} \qquad \forall \boldsymbol{i} \in [\![\mathbf{1}, \boldsymbol{n}]\!]$

Lo, A. & Tang, Z. (2018). caractérisent analytiquement l'ensemble des polices de réassurance optimales au sens de Pareto et visualisent l'assureur géométriquement la structure de compromis du réassureur.

En éliminant les paramètres q_1,q_2 et q_3, nous aurons l'équation de la surface Pareto-optimale suivante : $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{4a_i} - U_i}{a_i\, Y}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,$

Ce qui devient dans notre cas : $\sqrt{25 - U_1} + \sqrt{1 - \frac{U_2}{5}} + \sqrt{1 - \frac{U_3}{5}} = 6{,}177$

La valeur de Shapley, L.S. (1953) à utilité transférable, c'est-dire sans insérer de constante k_j pour l'instant, est trouvée en résolvant le système de deux équations :

$$U_1 + U_2 + U_3 = v(\{1,2,3\}) \quad \text{(d)}$$

$$\sqrt{25 - U_1} + \sqrt{1 - \frac{U_2}{5}} + \sqrt{1 - \frac{U_3}{5}} = \sqrt{38{,}16} \quad \text{(e)}$$

Cette valeur donne une répartition équitable des bénéfices aux joueurs. En formulant que le plans (d) est tangent à la surface (e), nous obtenons les quatre inconnues U_1, U_2, U_3 et $v(\{1,2,3\})$ de notre système. Nous trouvons donc les solutions suivantes :

$$U_1 = \emptyset_1\ (\bar{v}) = 1{,}583175$$

$$U_2 = \emptyset_2\ (\bar{v}) = 3{,}079841$$

$$U_3 = \emptyset_3\ (\bar{v}) = 3{,}079841$$

$$v(\{1,2,3\}) = 7{,}743957$$

En remplaçant dans (c), on obtient :

$$q_1 = 0{,}783357$$

$$q_2 = 0{,}100318$$

$$q_3=0,100318$$

Ces valeurs ne sont pas admissibles puisque :

$$\sum_{i=1}^{3} q_i = 0,983993 \neq 1$$

Donc ce point se situe au-dessus de la surface Pareto-optimale. On multiplie ainsi les versements de A_1 par k_1, ceux de A_2 par k_2 et ceux de A_3 par k_3. On désigne par $\emptyset^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\bar{v}})$ et $\bar{v}^{\,k}(\{1,2,3\})_,$ les transformés respectivement de $\emptyset(\bar{v})$ et $\bar{v}(\{1,2,3\})_,$ par cette opération. Nous savons bien que nous pouvons exiger une dépendance arbitraire aux poids k_j. Nous supposons donc que leur somme vaut n. Cela nous procure trois équations à savoir :

$$\sqrt{25-\emptyset_1^k(\bar{v})/k_1}+\sqrt{1-\emptyset_2^k(\bar{v})/k_2}+\sqrt{1-\emptyset_3^k(\bar{v})/k_3}=\sqrt{38,16}$$

$$\emptyset_1^k(\bar{v})+\emptyset_2^k(\bar{v})+\emptyset_3^k(\bar{v})=\bar{v}^{\,k}(\{I,2,3\})_,$$

$$k_1+k_2+k_3=3$$

Pour 7 inconnues $\emptyset_1^k(\bar{v})$, $\emptyset_2^k(\bar{v})$, $\emptyset_3^k(\bar{v})$, k_1,k_2,k_3 et $\bar{v}^{\,k}(\{1,2,3\})_,$

En formulant que :

- La surface Pareto-optimale est tangente à l'hyperplan de transférabilité ;
- La valeur doit se situe sur la surface ;

Et en simplifiant les inconnues, nous aurons après développement un polynôme de 4ème degré en k_1.

Cette équation a 3 solutions négatives et une seule solution positive :

$$k_1 = 0,776313$$

$$k_2 = 1,111684$$

$$k_3 = 1,111684$$

$$\emptyset_1^k(\bar{v}) = 1,169078$$

$$\emptyset_2^k(\bar{v}) = 3,099199$$

$$\emptyset_3^k(\bar{v}) = 3,099199$$

$$\bar{v}^{\,k}(\{1,2,3\})_, = 7,367477$$

En remplaçant dans (e) et puisque $\emptyset_i(\bar{v}) = \emptyset_i^k(\bar{v})/k_i$, il vient :

Tableau N°2 : Utilité optimale résultant du traité d'échange de risques.

	$\boldsymbol{q_i}$	$\boldsymbol{U_i(\bar{y})}$
1	q_1 = 0,784648	$U_1(\bar{y})$ = 1,505937
2	q_2 = 0,107676	$U_2(\bar{y})$ = 2,787842
3	q_3= 0,107676	$U_3(\bar{y})$ = 2,787842

Source : réalisé par nos soins.

D'après le tableau N°2 et comme nous pouvions s'y attendre, A_1, qui a le moins peur de risque, prendra à sa charge une quote-part considérable des sinistres. Par contre, cette compagnie va évidemment imposer une compensation monétaire notée $y_i(0)$. Nous pouvons démontrer que cette compensation doit être égale à $y_i(0) = q_i \sum_{j=1}^{n}(\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{2a_j}} - \boldsymbol{D_j})$ - $(\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{2a_i}} - \boldsymbol{D_i})$

Il vient $y_2(0) = y_3(0)$ = 2,029856

Donc A_1 va percevoir au total $y_1(0) = y_2(0) + y_3(0)$ = 4,059712

Avec cette démarche, nous avons pu isoler un traité de la surface Pareto-optimale. Néanmoins, un ensemble de critiques peuvent être exprimées au sujet du concept de valeur de Shapley. En effet, le manque le plus sérieux est l'axiome de linéarité qui n'est justement pas réalisé, parce que les compagnies d'assurance examinent leur situation à l'aide de fonctions d'utilité qui sont de nature non-additives. En d'autres termes, l'utilité obtenue par la signature de deux traités d'échange de risques est tout à fait différente du total des utilités partielles. C'est pour cette raison, nous allons introduire, dans ce qui suit, une nouvelle solution basée immédiatement sur les jeux à utilité non-transférable.

Rappelons les utilités initiales : $U_1(\{1\})$ = 0,44
$U_2(\{2\})$ = 2,2
$U_3(\{3\})$ = 2,2

On se base sur les ensembles de deux compagnies.

Coalition $\{1,2\}$: la maximisation du produit :

$$[U_1 (\{1,2\}) - U_1 (\{1\})] [U_2(\{1,2\}) - U_2 (\{2\})] = [-a_1 q_1^2 Y + a_1 Y_1] [- a_2 q_2^2 Y + a_2 Y_2]$$

entraîne, après élimination de q_2 à une polynôme du 3ème degré en q_1

$$q_1^3 - \frac{3}{2} q_1^2 + \frac{Y - Y_1 - Y_2}{2Y} q_1 + \frac{Y_1}{2Y} = 0$$

Ce polynôme a pour racines :

q_1= 0,877593 U_1 ({1,2}) = 1,124759

q_2=0,122407 U_2 ({1,2}) = 2,677553

Coalition {1,3} : par l'effet de la symétrie entre A_2 et A_3, on trouve consciencieusement :

q_1= 0,877593 U_1 ({1,3}) = 1,124759

q_3=0,122407 U_2 ({1,3}) = 2,677553

Coalition {2,3} :

q_2=0,5 U_2 ({2,3}) = 2,7

q_3=0,5 U_3 ({2,3}) = 2,7

Coalition {1,2,3} : le système composé des équations (a) et (b) devient après résolution par le principe des multiplicateurs de Lagrange,

$q_1(q_2^2Y - Y_2)= q_2(q_1^2Y - Y_1)$

$q_1(q_3^2Y - Y_3)= q_3(q_1^2Y - Y_1)$

$q_1+q_2 + q_3 = 1$

et nous pouvons le résoudre par approximations successives.

{1,2} ∪ {3} q_1= 0,783358
q_2 = 0,102926
q_3 = 0,113716

{1,3} ∪ {2} q_1= 0,783358
q_2 = 0,113716
q_3 = 0,102926

{2,3} ∪ {1} q_1= 0,794826
q_2 = 0,102587
q_3 = 0,102587

On aboutît donc à la solution optimale suivante :

Tableau N°3 : Nouvelle solution optimale résultant du traité d'échange de risques.

	q_i	$U_i(\{1,2,3\})$	$y_i(0)$
1	q_1= 0,78718	U_1 ({1,2 3}) = 1, 354042	$y_1(0)$ = -3,91792
2	q_2 = 0,10641	U_2 ({1,2 3}) = 2,839563	$y_2(0)$ = 1,95896
3	q_3 = 0,10641	U_3 ({1,2 3}) = 2,839563	$y_3(0)$ = 1,95896

Source : réalisé par nos soins.

Ainsi, à partir du tableau N°3 la solution trouvée, basée immédiatement sur les jeux à utilité non-transférable, est légèrement moins avantageuse à la compagnie A_1.

Pourtant, la création de valeur est bien procurée et va accroître la productivité de trois compagnies d'assurance pour atteindre la rentabilité, elle va donc de pair avec la croissance de tous les assureurs. Concrètement, il s'agit d'un ensemble coopérations qui participent à créer cette valeur.

Conclusion

Un pluralisme d'approches originales et de théories a été mobilisé pour mieux appréhender le sujet dans sa globalité et répondre à la problématique centrale. Les conditions caractérisant un équilibre d'échange de risques majeurs sont trouvées. Une variante des conditions, basée sur la notion d'optimalité de Pareto et impliquant des fonctions d'aversion au risque des agents, est dérivée. L'introduction des primes de marché et des indemnités optimales est illustrée par un exemple avec des fonctions d'utilité quadratiques. Nous avons prouvé à partir du cas de la double explosion du port de Beyrouth, en tant que risque majeur, que la mutualisation des risques est toujours bénéfique créant la valeur, autant pour les assureurs que pour les assurés. En effet, Cette coopération va encourager à la fois les compagnies d'assurance à diminuer les primes de risque et les entreprises industrielles à s'assurer.

Des solutions numériques spécifiques sont fournies pour mieux expliquer les avantages de souscrire de contrats d'échange de risque pour les assureurs, à travers des méthodes d'optimisation numérique appropriées choisies qui permettent également pour de divers problèmes de mutualisation des risques.

Nous pouvons aussi signaler qu'il existe d'autres pistes de recherche, qui paraissent prometteuses, si notre propos est de développer une théorie réaliste de l'assurance coopérative en fonction des données et des paramètres qui sont de plus en plus mis à jour.

Sur le plan libanais, le premier ministre libanais a mis en garde, récemment, contre les dangers de l'effondrement d'un silo à grains dans le port de Beyrouth, en raison d'un incendie continu qui se propage au milieu de la chaleur estivale et de la forte humidité, dans une scène qui pourrait répéter la tragédie de l'explosion du port il y a deux ans. C'est pourquoi, il faut mettre l'accent sur l'action coopérative, notamment entre les compagnies d'assurance, qui s'avère le seul moyen de relever le grand défi de notre époque : « les changements climatiques » dus, en premier lieu aux risques industriels. Cette coopération procure une création de valeur et vise à accélérer le passage à une économie verte et plus durable à travers le monde.

BIBLIOGRAPHIE

Asimit, A.V. and Boonen, T.J. (2018). Insurance with multiple insurers: a game- theoretic approach. European Journal of Operational Research, 267(2), 778-790.

Asimit, A.V., Gao, T., Hu, J. and Kim, E.S. (2018). Optimal risk transfer: a numerical optimisation approach. North American Actuarial Journal, to appear.

Borch, K. (1960b). The safety loading of reinsurance premiums. Skandinavisk Aktuari-etidskrift 163 - 184.

Borch, K. (1960c). Reciprocal reinsurance treaties. ASTIN Bulletin 1(4), 170-191.

Borch, K. (1962). Equilibrium in a reinsurance market. Econometrica 30, 424 - 444.

Borch, K. (1969). The optimal reinsurance treaty. ASTIN Bulletin 5(2), 293-297. Reprinted as Chapter 2 in Borch (1974).

Buhlmann, H. (1970). Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Cai, J. and Weng, C. (2016). Optimal reinsurance with expectile. Scandinavian Actu- arial Journal 2016(7), 624 - 645.

Cai, J., Liu, H. and Wang, R. (2017). Pareto-optimal reinsurance arrangements under general model settings. Insurance: Mathematics and Economics, 77, 24-37.

Cheung, K.C., Chong, W.F. and Yam, S.C.P. (2015b). The optimal insurance under disappointment theories. Insurance: Mathematics and Economics 64, 77 - 90.

Devi, S. (2020). Lebanon faces humanitarian emergency after blast. Lancet (London, England), 396 (10249), p.456.

D'Ortona, A. E. and Marcarelli, G. (2017). Optimal proportional reinsurance from the point of view of cedent and reinsurer. Scandinavian Actuarial Journal 2017(4), 366- 375.

Fischer, T. (2003). Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. Insurance: Mathematics and Economics 32, 135 - 146.

Gerber, H.U. (1978). Pareto-optimal risk exchanges and related decision problems. ASTIN Bulletin 10, 25 - 33.

Gerber, H.U. and Pafumi G. (1998). Utility functions: from risk theory to finance. North American Actuarial Journal 2(3), 74 - 100.

Golubin, A.Y. (2008). Pareto optimality and equilibrium in an insurance market. ASTIN Bulletin 38(2), 441 - 459.

GUECHATI.I & CHAMI.M. (2022) « Lebanon, economic and financial crises, reasons for collapse », Revue Française d'Economie et de Gestion «Volume 3 : Numéro 6 » pp :276 – 291.

Hans U. Gerber, Elias S.W. Shiu, Hailiang Yang. (2013). Valuing equity-linked death benefits in jump diffusion models. Insurance / Mathematics & economics. - Amsterdam : Elsevier, ISSN 0167-6687, ZDB-ID 8864-X. - Vol. 53.2013, 3, p. 615-623

Knight, F. H. (1921). Risk, Uncertainty and Profit. The Quarterly Journal of Economics Vol. 36, No. 4 (Aug., 1922), pp. 682-690

Lemaire, J (1977). Exchange of risks between insurers and game theory. Cambridge University Press.

Lo, A. (2017). A Neyman-Pearson perspective on optimal reinsurance with constraints. ASTIN Bulletin 47(2), 467 - 499.

Lo, A. and Tang, Z. (2018). Pareto-optimal reinsurance policies in the presence of individual risk constraints. Annals of Operations Research, in press.

Shapley, L.S. (1953). A Value for n-Person Games, in Kuhn H. et Tucker A. W (éds.): Contributions to the Theory of Games II, Princeton University Press, pp. 307-317.