Revue Internationale des Sciences de Gestion

ISSN: 2665-7473

Volume 3 : Numéro 4

Renormalisation de la volatilité equity du temps business au temps pricer

Renormalization of the equity volatility of time business at pricer time

ELRHOULAM Houssam

Doctorant

Faculté des sciences juridiques, économiques et sociales-Souissi

Université Mohammed V – Rabat – Maroc

Laboratoire d'Analyse Economique et Modélisation

Elrhoulam.houssam@gmail.com

Date de soumission : 10/09/2020

Date d'acceptation : 17/10/2020

Pour citer cet article :

ELRHOULAM H. (2020) « Renormalisation de la volatilité equity du temps business au temps pricer », Revue Internationale des Sciences de Gestion « Volume 3 : Numéro 4 » pp : 545- 567.

Résumé

Dans le cadre de la gestion de portefeuilles, connaître la dynamique des grecques est indispensable afin de pouvoir anticiper l'évolution des risques en fonction de l'environnement de marché et les couvrir le cas échéant.

Le lien entre les paramètres de valorisation d'un portefeuille et les risques associés constitue de ce fait un facteur clé de succès de la couverture dynamique et statique d'un portefeuille d'options .De ce fait la connaissance de l'évolution des prix dans le temps, mesurée par le thêta, est indispensable pour une meilleure couverture.

L'utilisation d'un modèle Black & Scholes simple pour le pricing d'options donne des sauts du thêta la veille des jours fermés en particulier les vendredis. Ceci est due au fait que ce modèle prévoit qu'il y a de la variance pendant les jours fermés alors que dans la vraie vie il n'y en a pas ou alors il y en a très peu. Cet article propose des modèles de volatilités implicites qui vont nous permettre d'éviter les sauts la veille des jours fermés en introduisant la notion de la volatilité calendar effect.

Mots clés: Black & Scholes ; Profit & Loss ; Calendar Effect ; Thêta ; Volatilité.

Abstract

In the framework of portfolio management, knowing the dynamics of the Greeks is indispensable in order to anticipate the evolution of risks according to the market environment and to cover them if necessary.

The link between the valuation parameters of a portfolio and the associated risks is thus a key success factor in the dynamic and static coverage of an options portfolio. Thus the knowledge of prices evolution in time, measured by the theta, is indispensable for a better cover.

The use of a simple black & Scholes model for pricing options gives Theta jumps on the eve of closed days especially on Fridays. This is due to the fact that this model predicts that there is variance during closed days when in real life there is none or so there are very few. This article proposes models of implicit volatilities that will allow us to avoid jumps on the eve of closed days by introducing the notion of the volatility calendar effect.

Keywords: Black & Scholes; Profit & Loss; Calendar Effect; Theta; Volatility.

Introduction

Nul ne peut ignorer le rôle que joue le système financier dans la simulation de la croissance économique, et ce, à travers la collecte et l'injection des flux financiers dans les rouages de l'économie. Dans ce contexte les marchés financiers et en particulier le marché des dérivés joue, entre autres, un rôle important.

Le marché des dérivés ne cesse de prendre de l'importance, que ce soit par les sommes importantes qu'il draine, ou au niveau des tendances qui le caractérise ces dernières années tant d'un point de vue quantitatif que qualitatif .Toutefois, à cause de son caractère risqué vu que les instruments y échangés sont des actifs financiers servant pour se couvrir ; mais, aussi pour prendre des positions spéculatives. Le marché des dérivés suscite régulièrement de vives inquiétudes

Les pertes sur le marché des dérivés ne sont pas l'apanage des entreprises non financières Certaines institutions financières, parmi les leaders dans le domaine, ont essuyé de gros revers. La Société Générale en 2007, la Barings Bank en 1994, Amaranth Advisors en 2006, la caisse d'épargne Ecureuil en 2008, en plus des trentaines de pertes de trading supérieures à 100 millions de dollars qu'on pourrait recenser ces vingt dernières années et dont la fréquence augmente depuis 2000 sont tous des exemples de pertes rencontrées sur le marché des dérivés et qui sont dues à des malversations ou une mauvaise appréciation des risques.

Pour les traders et gérants de portefeuilles, connaitre de manière précise la dynamique de leurs grecques est indispensable pour anticiper l'évolution de nombreux risques en fonction de l'environnement de marché et les couvrir le cas échéant. Cependant une évaluation des options par un simple modèle de black & Scholes donne des grecques qui sautent la veille des jours fermés et donne par la suite une illusion du contrôle et une sous-estimation des risques.

De nombreux travaux ont essayé de trouver des modèles adéquats pour calibrer la volatilité et trouver des solutions pour éviter les sauts, en fait (Tankov, 2012) a présenté de différents modèles concernant la calibration de la volatilité dans les marchés d'option à l'échelle déterministe et stochastique ainsi les outils pour régler le problème des sauts, aussi (Hull, 2014) a traité les mécaniques des marchés d'option dans son ouvrage mettant l'accent sur l'estimation de la volatilité pour la gestion des risques.

Alors comment peut-on calibrer la volatilité de la classe d'actifs actions par le modèle de Black & Scholes sur une base de temps donnée ?

Pour atteindre cette cible, ce travail sera dédié en premier lieu à une présentation du modèle de Black & Scholes concernant l'évaluation des options. En second lieu, la compréhension de l'origine du problème des sauts et leur impact sur les P&L journaliers ainsi le pricing avec le modèle de Black & Scholes simple et finalement, la présentation du modèle de calibration de la volatilité communément appelé calendar effect, sur la base de temps business convention (252).

1. Le modèle de la Black & Scholes pour l'évaluation des options

1.1. Black & Scholes

En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule, qui porte aujourd'hui leurs noms, pour le prix d'une option européenne d'achat. Elle est utilisée en pratique en définissant la volatilité implicite une véritable unité de mesure. Le modèle mathématique qui décrit le marché financier est à la fois simple et efficace.

Hypothèses du modèle :

Pour obtenir l'équation de Black-Scholes, certaines hypothèses doivent être vérifiées à savoir

- le marché est complet,
- le temps est continu,
- le sous-jacent est infiniment divisible (par exemple on peut acheter 1/100 de sous-jacent),
- l'autorisation des ventes à découvert,
- inexistence de coup relatif à la transaction,
- l'existence d'un taux d'intérêt constant,
- il n'y a pas de dividende (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions),
- La dynamique du sous-jacent sous la probabilité risque neutre est donnée par :

$$\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma dWt \qquad \mathbf{(1)}$$

Avec :

(Wt): Est un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre.

r: Étant le rendement sans risque.

σ: La volatilité du sous-jacent.

<u>Formules fermées de Black & Scholes :</u>

Les formules de Black-Scholes (Alexis, 2014) permettant d'avoir pour la date t, la valeur d'un call / Put européen sur une action qui ne verse pas de dividendes sont les suivantes :

$$C_t = S_t\, N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\, N(d_2)$$

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}\, N(-d_2) - S_t\, N(-d_1)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{St}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Et

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{St}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Où :

$N(x)$: est la fonction de répartition de la loi normale centre-réduite.

$\tau = T - t$: Appelé dans le jargon de la finance le ténor.

Une manière de démontrer cette formule est d'utiliser l'approche intégrale qui consiste à utiliser la méthode d'évaluation risque-neutre et que les payoffs actualisés sont des martingales.

Et donc la valeur du call / Put européen est égale à l'espérance de la valeur du payoff à l'échéance, actualisée au taux sans risque : (voir annexe)

$$C_t = e^{-r(T-t)}\ \hat{E}\,[\max\,(S_T - K;\ 0)]$$
$$P_t = e^{-r(T-t)}\hat{E}\,[\max\,(K - S_T\,;\ 0)]$$

<u>Extension du modèle :</u>

Il s'agit du cas des coefficients dépendant du temps. La dynamique du sous-jacent sous la probabilité risque neutre Q est :

$$\frac{dSt}{St} = r\,dt + \sigma_t\,dWt \qquad (2)$$

Les formules fermées ci-dessus restent les mêmes en remplaçant seulement σ^2 par $\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_s^2 ds$,

1.2. EDP de Black & Scholes :

Une autre manière de démontrer la formule de Black & Scholes consiste à résoudre l'équation aux dérivées partielles backward obtenue par l'application du lemme d'Itô (voir annexe) :

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{\delta v}{\delta t}(t,x) + rx\frac{\delta v}{\delta x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(t,x) = rv(t,x),\ (t,x)\epsilon[0,T) \times\ ]0,+\infty) \\ v(T,x) = h(x) \end{cases}$$

Le flux $h(S_T)$ désigne le payoff du Call / Put et peut être répliqué par un portefeuille, dont la valeur à la date t est $v(t, S_t)$, tout en investissant la quantité $\delta(t, S_t) = \frac{\delta v}{\delta x}(t, S_t)$ dans l'actif risqué S.

Dans le cas où on utilise le sous-jacent forward $F_t = e^{r(T-t)} S_t$ et des prix non discountés c'est-à-dire : $w = e^{r(T-t)}$ v au lieu de v nous obtenons l'EDP sur le forward suivante (voir annexe).

$$\frac{\delta w}{\delta t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}(t,x) = 0 \qquad (4)$$

1.3. Volatilité historique et Volatilité implicite :

La volatilité historique

C'est l'écart-type des rendements. Elle est calculée en se basant sur les log-rentabilités du sous-jacent :

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{1}{N-1} * \sum_{i=1}^{N} (R_i - m_H)}$$

Avec :

R_i : log-rentabilité du sous jacent sur la période i : $R_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i)$

m_H : Moyenne empirique des log-rendements : $m_H = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{N} R_i$

La volatilité implicite

Selon le modèle de Black& Scholes le prix de l'actif évolué est déterminé par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t \,.$$

à partir de ce modèle de diffusion de l'actif, on peut déterminer le prix des options sur cet actif. Inversement, la volatilité σ étant le seul paramètre non observable de ce modèle, on s'intéresse au calcul de σ à partir du prix d'une option (K, T) observé sur le marché. La volatilité ainsi obtenue est appelée volatilité implicite noté $\sigma_{imp}(K, T)$.

Dans le cas où σ est déterministe dépendante du temps (σ_t), on a la relation suivante :

$$\sigma_{imp}{}^{2} = \frac{1}{T-t}\int_{t}^{T} \sigma_s^2 ds$$

1.4. Les grecques :

Les grecs ou grecques sont des indicateurs de gestion qui permettent d'anticiper la manière dont va évoluer une option en fonction des variables auxquelles elle est étroitement liée ainsi la couverture des risques associés à un portefeuille d'options.

Les principaux grecques sont :

Delta :

Il mesure la sensibilité du prix par rapport aux variations du cours du sous-jacent ($\delta = \frac{\delta v}{\delta S}$). Il est le premier des indicateurs pris en compte par le trader.

Il fournit une information sur la variabilité de l'option mais aussi sur la probabilité de l'exercer.

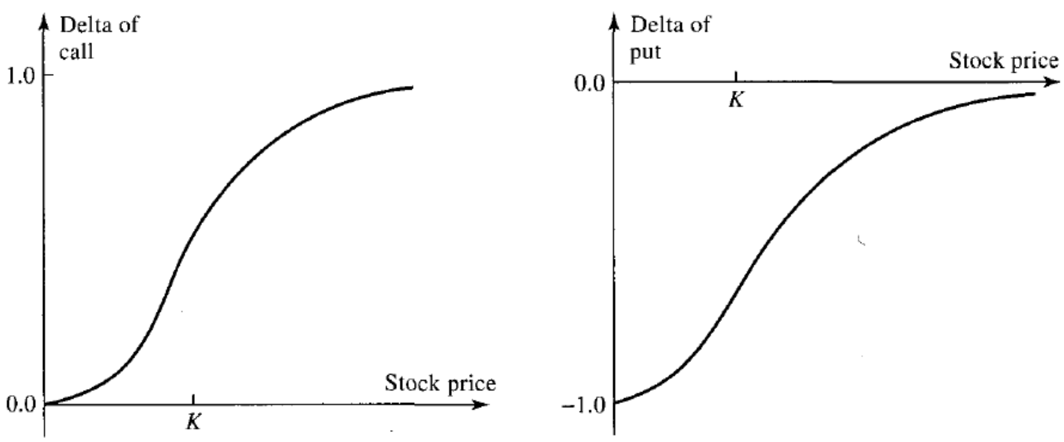
Enfin, elle représente la quantité d'actifs supports dans le portefeuille de couverture.

Le Delta d'un Call / Put européen dans le modèle de Black-Scholes est donné par :

$$\delta_C = \frac{\delta C}{\delta S} = N(d_1)$$

$$\delta_P = \frac{\delta P}{\delta S} = N(d_1) - 1$$

Figure N°1 : Evolution du delta en fonction du sous-jacent



Source : élaboré par l'auteur (Arthur, 2006).

Gamma :

Le gamma représente la vitesse du delta, c' est à dire l'accélération de la prime aux variations du sous-jacent $\left(\Gamma = \frac{\delta\delta}{\delta s} = \frac{\delta^2 v}{\delta s^2}\right)$.

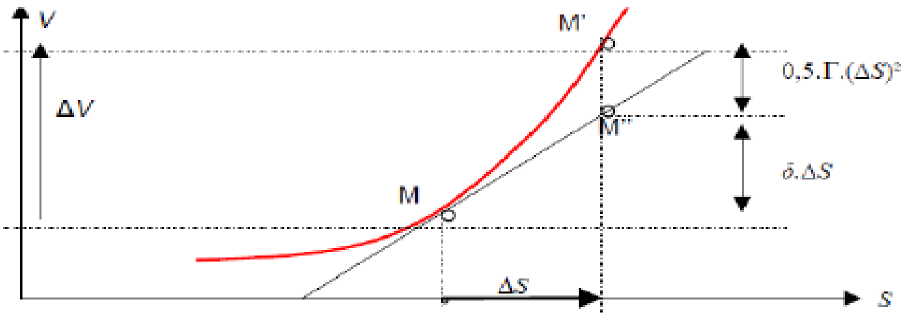
Le gamma a le pouvoir de la représentation la convexité du prix d'une option par rapport au cours du sous-jacent en indiquant la vitesse d'évolution du prix de l'option au regard du prix du sous-jacent.

Le Gamma d'un Call / Put européen dans le modèle de Black-Scholes est identique et est donné par :

$$\Gamma_C = \Gamma_P = N(d_1) \times \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} \qquad (5)$$

Lorsque le gamma est faible, les fluctuations du cours du sous-jacent n'ont que des effets très négligeables sur le delta. Dans ce cas, il ne sera guère nécessaire de réviser les positions détenues pour maintenir le delta proche du niveau recherché.

Figure N°2 : le Γ comme indicateur de convexité



Source : élaboré par l'auteur sur stratégies-options

Sous l'influence de ΔS, le point M se positionne en M′et si la convexité est nulle ($\Gamma = 0$), sa nouvelle position deviendrait le pointM″.

Pour des grandes variations du sous-jacent (ΔS), le gamma de la position est grand et non négligeable.

Au second ordre, pour une variation ΔS du sous-jacent, on a : $\Delta v = \delta \times \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma \times \Delta S^2$

<u>Véga :</u>

C'est la sensibilité du prix de à la volatilité du sous-jacent. $(\vartheta = \frac{\delta v}{\delta\sigma})$

Le Véga d'un Call / Put européen dans le modèle de Black-Scholes est identique et est donné par :

$$\vartheta_C = \vartheta_P = N(d_1) \times S\sqrt{\tau} \qquad \mathbf{(6)}$$

ISSN: 2665-7473
Volume 3 : Numéro 4

Cette quantité représente peu d'intérêt dans le cas du modèle de Black-Sholes puisque est supposée constante.

Notant qu'il existe une relation entre le Gamma et le Véga de l'option. En effet d'après $(\mathbf{5})$ et $(\mathbf{6})$ on a :

$$\boxed{\vartheta = S^2 \sigma \tau \Gamma} \qquad (7)$$

<u>Thêta :</u>

Le Thêta d'une option mesure la variation attendue du prix de cette option sur une période, due au seul passage du temps.

$$\theta = \frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{\delta v}{\delta \tau}$$

Dans le modèle de Black & Scholes, le Thêta d'un call est donné par :

$$\theta = -\frac{\delta C}{\delta \tau} = -\left(\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) + rKe^{-r\tau} N(d_2)\right)$$

Où f est la densité d'une loi normale centrée réduite : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Comme vu précédemment, la valeur temps d'une option est une fonction décroissante des jours restants à la maturité et les options sont donc d'autant moins chères que leur échéance est proche ceci donne un Thêta qui est toujours négatif..

2. Pricer avec un modèle Black&Scholes

La simplicité d'utilisation du modèle de Black & Scholes pour l'évaluation des options et la mise au point de couverture a fait qu'il a énormément contribué à la démocratisation des options auprès d'un large public. Cependant il présente un inconvénient. En effet, un pricing Black & Scholes simple suppose qu'il y a de la variance pendant les jours fermés alors que dans la vraie vie il n'y en a pas ou alors il y en a très peu. Ceci donne des grecques qui sautent typiquement la veille des jours fermés, en l'occurrence la veille du vendredi, chose qui influence les stratégies de couverture des traders ainsi que leurs P&L journaliers.

2.1. La variance des rendements

La liquidité d'un actif financier et dans notre cas des actions repose sur plusieurs facteurs et parmi eux on trouve le risque du titre lui-même qui est évalué par la volatilité des rendements historique et le niveau du prix (Bouzia & Cherkaoui, 2020).

Les routines de pricing avec le modèle de Black & Scholes supposent en interne une diffusion du spot sur tous les jours (ouvrés ou non).

La variance implicite du rendement du spot entre la date de pricing t et la maturité T est donnée par :

$$Var\left(ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right) = volBS^2(T-t)$$

Où :$volBS$ est la volatilité implicite Black & Scholes.

t et T sont exprimés en nombre d'années.

Preuve :

En effet dans un univers risque neutre la dynamique de S à l'instant t (en l'absence de dividendes) est donnée par :

$$S_t = S_0 e^{rt-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u{}^2 du+\int_0^t \sigma_u dw_u}$$

Et donc

$\frac{S_T}{S_t} = e^{r(T-t)-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_u{}^2 du+\int_t^T \sigma_u dw_u}$

D'où

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_u{}^2 du + \int_t^T \sigma_u dw_u$$

Qui suit une loi normale d'espérance $r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_u{}^2 du$ et de variance $\int_t^T \sigma_u{}^2 du$ puisque le processus (σ_t) est déterministe

Finalement

$Var\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right) = volBS^2(T-t)$ Avec $volBS^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_u^2 du$

En particulier si $\sigma_t = \sigma$, alors $volBS^2 = \sigma^2$

Soit l'exemple le plus simple d'une option qui expire le mardi 29 Mars 2016, avec une volatilité implicite supposée constante égale à : $volBS = 20\%$.

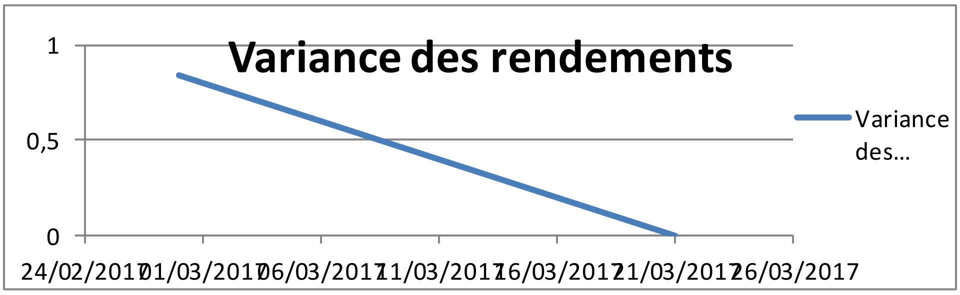
- Supposant que la date de pricing est le lundi 21 Mars 2016, alors la variance jusqu'à la maturité est égale :$volBS^2 \times \frac{8}{365} = 8.76712 \times 10^{-4}$

➢ Supposant que la date de pricing est le jeudi 24 Mars 2016, alors la variance jusqu' la maturité est égale : $volBS^2 \times \frac{5}{365} = 5.47945 \times 10^{-4}$

➢ Naturellement, pour la date de pricing 29 Mars 2016, la variance est nulle car il s'agit de la maturité de l'option.

Le graphe ci-dessous illustre l'évolution de la variance des rendements en fonction du nombre de jours calendaires jusqu'à maturité sur un calendrier qui contient des dates de pricing qui s'étalent du 28 Février 2017 au 21 Mars 2017, pour une date de maturité 21 Mars 2017 et une volatilité implicite Black & Scholes constante égale à 20%.

Figure N°3 : Variance des rendements par un modèle Black & Scholes simple



Source : Calcul de l'auteur

Effectivement la variance décroit linéairement avec le nombre de **jours calendaires** restants à la maturité ceci dit que le modèle prévoit qu'u il y a de la variance tous les jours en particulier pendant les jours fermés ce qui contredit la réalité.

2.2. Problème du Thêta

L'utilisation directe la volatilité implicite marquée par les traders dans le pricing, décroit la variance linéairement avec le nombre de jours calendaires. Ceci donne un thêta qui saute typiquement la veille des jours fériés, en particulier tous les vendredis .En effet soit le delta hedging d'une option dans le modèle Black and Scholes :

$$\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma dWt$$

L'évolution journalière du Thêta pur sur la valeur du portefeuille de couverture discounté entre deux dates futures t_- et t_+ est donné par :

$$\Delta P = P(t_+, x, \sigma) - P(t_-, x, \sigma)$$

Où :

x est le forward supposé constant entre t_- et t_+.

t_- : désigne la clôture du jour j (la pricing date) et t_+ la clôture du jour ouvré suivant j+1 (appelé dans le jargon de la finance le «Theta date»).

On a :

$$\Delta P = \int_{t_-}^{t_+} dP = \int_{t_-}^{t_+} \frac{\partial P}{\partial t} dt = \int_{t_-}^{t_+} \theta^{BS}(t,x,\sigma)\, dt$$

Or d'après l'EDP de Black & Scholes sur le forward (4) :

$$\theta^{BS}(t,x,\sigma) = -\frac{1}{2}\sigma^2\, x^2\, \Gamma^{BS}(t,x,\sigma)$$

Donc :

$$\Delta P = -\int_{t_-}^{t_+} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, \Gamma^{BS} dt \approx -\$\, \Gamma^{BS} \int_{t_-}^{t_+} \sigma^2\, dt \approx -\,\$\, \Gamma^{BS}(t_-,x,\sigma)\sigma^2(t_+ - t_-)$$

Avec $\$\, \Gamma^{BS}\left(t_-,x,\sigma_{t_-}(T)\right) = \frac{1}{2}\, x^2\, \Gamma^{BS}(t,x,\sigma_t(T))$

L'écriture précédente est justifiée .En effet :

-Pour $t_+ - t_- = 1$ jour (Thêta journalier du lundi au jeudi) l'hypothèse d'un forward quasi constant. Le sous-jacent S_t varie peut et de manière constante sur $[\ t_-\ ,\ t_+]$ ($S_{t_+} = S_{t_-} e^{r(t_+ - t_-)} \approx S_{t_-}$.

-Le Gamma étant financièrement parlant la fréquence de réajustement du portefeuille de couverture, on peut négliger ses mouvements dans cet intervalle.

-De la même manière, vu l'absence d'activités de marché pendant les jours fermés en général et les weekends en particulier, le gamma est nul les weekends.

<u>Application</u>

Soit un call sur l'indice Euro Stoxx 50 qui mature le 15 Mars 2022 avec un Strike $K = 3319.61$ et un taux d'intérêt sans risque de 3% et avec les données de marché suivantes :

Tableau N°1 : Thêta obtenu par un modèle Black & Scholses simple

pricing dates	spot	implied volatility
28/02/2017	3319.61	19.67005
01/03/2017	3390.201	19.67582
02/03/2017	3384.706	19.7534
03/03/2017	3403.393	19.81057
06/03/2017	3387.462	19.93243
07/03/2017	3385.122	19.91344
08/03/2017	3389.622	19.87277
09/03/2017	3409.894	19.8471
10/03/2017	3416.269	20.04151
13/03/2017	3415.491	20.03427
14/03/2017	3399.435	20.01516
15/03/2017	3409.319	20.00901
16/03/2017	3439.963	19.95155
17/03/2017	3448.407	19.92808
20/03/2017	3437.476	19.86711
21/03/2017	3437.476	19.91122

Source : Bloomberg

Bien que le pricing par le modèle simple (1) donne des sauts de Thêta la veille des vendredis et affiche un Thêta en ce jour trois fois plus grand en valeur absolue qu'un thêta calculé un autre jour de la semaine ce qui est en ligne avec la formule du Thêta développée précédemment notamment car $t_+ - t_- = 3$ jours et non 1 jour, mais est en contradiction avec le marché.

2.3. Des pertes non négligeables

Le trader est amené à calculer de façon journalière son résultat économique appelé P&L « Profits & Losses » ainsi qu'analyser et expliquer les écarts de ses p&L journaliers afin d'apprécier la rentabilité financière ou marge dégagée par son portefeuille et par la suite décider du sort de la position c'est-à-dire soit la maintenir ou la liquider.

La détention d'un portefeuille delta hedgé consiste à annuler la sensibilité d'une option aux variations du sous-jacent en annulant régulièrement le delta à l'aide d'une position sur le sous-jacent.

Une fois que le delta est annulé, il reste trois principaux risques :

-Le Gamma

-Le Thêta

-Le Vega

Ainsi la possibilité d'écrire le P&L d'une position optionnelle delta hedgée (Francois-Éric & Raymond, 2006) comme suit :

Daily P&L = Gamma P&L + Thêta P&L + Vega P&L + "autres"

Dans "autres" l'inclusion du P&L généré par le financement du sous-jacent (qu'on va acheter si on vend un call sur action par exemple), le P&L dû aux mouvements de taux, les dividendes ainsi que les sensibilités d'ordre supérieur (vomma, etc.).

L'écriture le P&L en fonction des lettres grecques :

$$Daily\ P\&L = 0.5 * \Gamma\ (\Delta S)^2 + \theta\ (\Delta t) + \nu\ (\Delta \sigma) + \dots$$

L'utilisation le modèle de pricing $(\mathbf{1})$ avec r et σ des constantes d'une part et en négligeant les variations de la volatilité et les sensibilités d'ordre supérieur d'autres part, l'équation devient :

$$\text{Daily P\&}L = 0.5\ \Gamma\ (\Delta \mathrm{S})^2 + \theta\ (\Delta \mathrm{t})$$

Soit le cas le plus simple où on considère les taux nuls alors on peut exprimer le thêta en fonction du gamma. En effet, à partir de l'EDP de Black & Scholes (3) , dans un monde où les taux sont nuls, on peut écrire :

$$\left(\frac{\delta v}{\delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}\right)=0$$

Ou encore $\theta = -0.5\,\Gamma\,\sigma^2 S^2$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\text{Daily P\&}L = -0.5\,\Gamma\,S^2\left(\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2-\sigma^2\Delta t\right)$$

$$=\frac{\theta}{\sigma^2}\left(\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2-\sigma^2\Delta t\right)$$

Interprétation de la quantité précédente de la manière suivante :

- $\frac{\Delta S}{S}$ est le rendement journalier. Son carré peut être interprété comme la variance réalisée.
- $\sigma^2\Delta t$ est la variance implicite journalière.
- $0.5\,\Gamma\,S^2$ est appelé le "dollar gamma", et exprime l'impact du gamma et du prix du stock sur le P&L.

En synthèse, le P&L journalier d'une position optionnelle delta hedgée dépend de la différence entre la variance réalisée et la variance implicite (facturée au client), ajustée d'un facteur égal au « dollar gamma ».

Ainsi, le P&L dépend à la fois de l'écart entre volatilité implicite et réalisée, mais également de la trajectoire du sous-jacent (qui va impacter le gamma, Thêta et le prix du sous-jacent).

Et donc comme le P&L dépend du Thêta et que ce dernier affiche des sauts 3 fois plus importants tous les vendredis, le trader aura alors un P&L qui lui aussi saute tous les vendredis et de manière générale les veilles des jours fermés. Ceci va influencer ses stratégies de couverture sur cette position concernant cette position et causera probablement des pertes non négligeables.

D'où la nécessité d'une calibration du modèle de Black & Scholes pour éliminer ces sauts.

3. La volatilité Calendar Effect

3.1. La volatilité calendar effect dans le cadre d'un modèle BS

Soit le delta hedging d'une option dans le modèle :

$$\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma dWt \ .$$

On aimerait appliquer une règle simple sur la volatilité de façon à trouver un modèle de volatilité implicite permettant d'éviter les sauts de thêta la veille des jours fermés de la forme $\sigma_t(T) = \alpha(t,T)\ \sigma$.

Pour rappel, le saut de Thêta pur sur la valeur du portefeuille de couverture discounté entre deux dates futures t_- et t_+ est donné par :

$$\Delta P = P\left(t_+, x, \sigma_{t_+}(T)\right) - P\left(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)\right)$$

Où x est le forward supposé constant entre t_- et t_+.

On a :

$$\Delta P = \int_{t_-}^{t_+} dP = \int_{t_-}^{t_+} \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial \sigma_t(T)} d\sigma_t(T)$$
$$= \int_{t}^{t_+} \left\{ \theta^{BS}(t, x, \sigma_t(T)) + \vartheta^{BS}(t, x, \sigma_t(T)) \frac{\partial \sigma_t(T)}{\partial t} \right\} dt$$

Or d'après la relation Gamma-Vega (7) et l'EDP de BS sur le forward (4) on a :

$$\theta^{BS} = -\frac{1}{2} {\sigma_t}^2(T)\ x^2\ \Gamma^{BS} \quad et \quad x^2\ \Gamma^{BS} \sigma_t(T)(T-t) = \vartheta^{BS}$$

Donc

$$\Delta P = \int_{t_-}^{t_+} \left\{ \frac{1}{2}\ x^2\ \Gamma^{BS}(t, x, \sigma_t(T)) \left(-{\sigma_t}^2(T) + 2\sigma_t(T)(T-t) \frac{\partial \sigma_t(T)}{\partial t} \right) \right\} dt$$
$$\approx \$\ \Gamma^{BS}\left(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)\right) \int_{t_-}^{t_+} \left\{ -{\sigma_t}^2(T) + 2\sigma_t(T)(T-t) \frac{\partial \sigma_t(T)}{\partial t} \right\} dt$$
$$\approx \$\ \Gamma^{BS}\left(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)\right) \int_{t_-}^{t_+} \frac{\partial\left({\sigma_t}^2(T)(T-t)\right)}{\partial t} dt$$
$$\approx \$\ \Gamma^{BS}\left(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)\right) \left({\sigma_t}^2(T)(T-t_+) - {\sigma_t}^2(T)(T-t_-) \right)$$

Avec $\$\ \Gamma^{BS}\left(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)\right) = \frac{1}{2}\ x^2\ \Gamma^{BS}(t, x, \sigma_t(T))$ appelé dollars gamma.

Pour annuler la contribution dollar Gamma ($\$\ \Gamma^{BS}$) pendant les jours fermés et en particulier les weekends on peut générer des incréments de variance totale constants durant ces périodes c'est-à-dire ${\sigma_{t_+}}^2(T)(T-t_+) - {\sigma_{t_-}}^2(T)(T-t_-) = 0$ ce qui donne :

$$\frac{\alpha(t_+,T)}{\alpha(t_-,T)} = \sqrt{\frac{T-t_-}{T-t_+}}$$

Si t_- est la date de fermeture le vendredi et t_+ la date d'ouverture le lundi suivant. Le modèle : $\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma 1_{t\epsilon O}\, dWt$ **(8)**

Où O est l'ensemble des jours ouvrés, a pour volatilité implicite $\sigma_t(T) = \sigma\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T 1_{s\epsilon O} ds}$ et génère des incréments de variance totale constants sur $[t_-, t_+]$.

C'est à dire : $\sigma_{t_+}{}^2(T)(T-t_+) - \sigma_{t_-}{}^2(T)(T-t_-) = 0$

L'ajustement est donc bon en choisissant :

$$\alpha(t,T) = \sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T 1_{s\epsilon O} ds}$$

Et donc la volatilité calendar effect σ du nouveau modèle $\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma 1_{t\epsilon O}\, dWt$ permettra de décrire un sous-jacent dont les mouvements de volatilité sont faibles durant les jours fermés

3.2. Les conventions de la fraction business

L'utilisation du modèle ajusté (8) et afin de pouvoir utiliser la formule de Black & Scholes pour les calculer les prix des calls et des puts, il faut convertir la volatilité Calendar Effect σ en volatilité Black & Scholes via la relation : $\sigma_t(T) = \sigma\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T 1_{s\epsilon O} ds}$ $= \sigma\sqrt{\frac{fraction\ Business}{fraction\ calendaire}}$

Avec :

- $fraction\ business = \frac{nombre\ de\ jours\ ouvrés\ entre\ t\ et\ T}{nombre\ moyen\ de\ jours\ ouvrés\ de\ l'année} = \int_t^T 1_{s\epsilon O} ds$ C'est-à-dire le nombre de jours 'business' exprimé en fraction annuelle.
- $fraction\ calendaire = \frac{nombre\ de\ jours\ calendaires\ entre\ t\ et\ T}{nombre\ moyen\ de\ jours\ calendaire\ de\ l'année} = T - t$ C'est-à-dire le nombre de jours calendaires exprimé en fraction annuelle.

En finance le nombre moyen de jours calendaires dans l'année est approximé par 365 jours. Cependant pour le nombre moyen de jours ouvrés plusieurs conventions existent Dans cette étude on a opté pour la convention suivante :

❖ **La convention 252**

Elle consiste à calculer le calendar effect en base 252 (le nombre moyen de jours ouvrés de l'année = 252).Il faut noter que cette convention est simpliste et ne tiens pas compte des différences de nombre de jours ouvrés entre les différents marchés.

❖ ***La variance des rendements :***

Comme vu précédemment un ajustement de volatilité permettant d'éviter les sauts du Thêta la veille des jours fériés est donné par :

$$\sigma_t(T) = \sigma\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T 1_{s\epsilon O}\,ds} = \sigma\sqrt{\frac{fraction\ Business}{fraction\ calendaire}}$$

En pratique la volatilité marquée par les traders est la volatilité implicite calendar effect σ coté sur le marché les jours business, on suppose implicitement donc qu'il n'y a pas de volatilité les jours fermés.

Afin de pourvoir utiliser la formule de black scholes, il faut convertir la volatilité calendar effect en volatilité implicite Black & Scholes $\sigma_t(T)$.

En théorie ce modèle permet de réduire les variations de variance des rendements entre deux instants de part et d'autres d'une période non ouvrée.

➢ Soit comme précédemment l'exemple simple d'une option qui expire le mardi 29 Mars 2016, avec une volatilité implicite supposée constante égale à : $volCE = 20\%$ et travaillant avec la convention 252 alors : Supposant que la date de pricing est le lundi 21 Mars 2016, alors la volatilité Black & Scholes utilisés dans la formule de calcul des prix est égale à :

$volBS = volCE \times \sqrt{\frac{\frac{6}{252}}{\frac{8}{365}}} = 0.208452$, et donc on aura une variance du rendement égale à

$volBS^2 \times \sqrt{\frac{8}{365}} = 9.52 \times 10^{-4}$

➢ Supposant que la date de pricing est le jeudi 24 Mars 2016, la volatilité Black & Scholes est égale à:

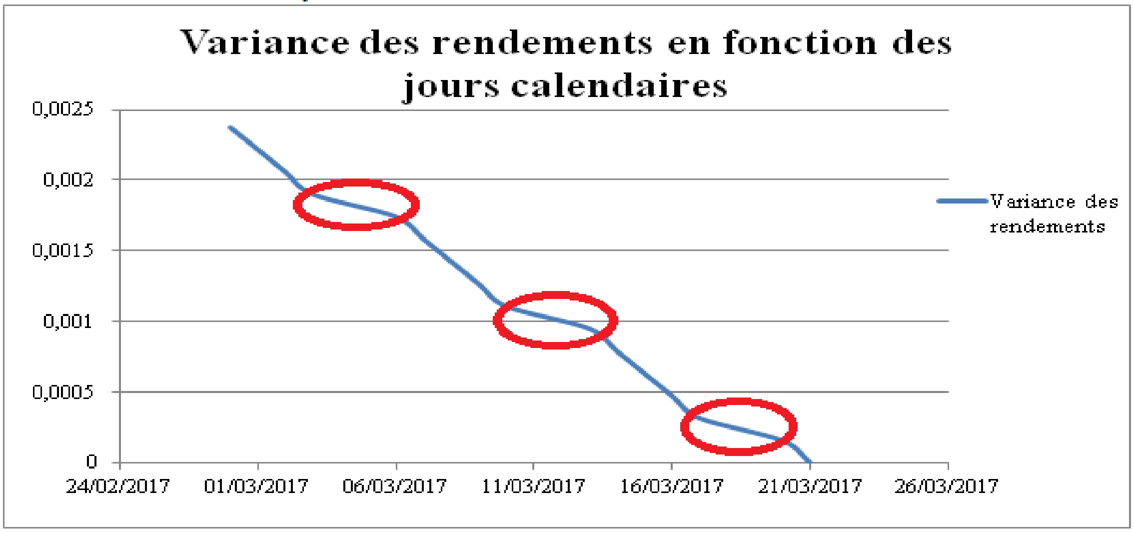
$volCE \times \sqrt{\frac{\frac{3}{252}}{\frac{5}{365}}} = 0.186445$, et donc la variance du rendement est égale à

$volBS^2 \times \sqrt{\frac{5}{365}} = 4.76 \times 10^{-4}$

➢ Naturellement, pour la date de pricing 29 Mars 2016, la variance est nulle.

Le graphe ci-dessous illustre les variations de la variance des rendements en fonction du nombre de jours calendaires jusqu'à maturité sur un calendrier qui contient des dates de pricing qui s'étalent du 28 Février 2017 au 21 Mars 2017, pour une date de maturité 21 Mars 2017 et une volatilité implicite calendar effect constante égale à 20%.

Figure N°4 : Variance des rendements par le modèle de volatilité calendar effect



Source : Calcul de l'auteur

On constate que la variance décroit linéairement avec le nombre de jours **ouvrés** restants à maturité et que les variations de variance des rendements entre deux instants de part et d'autres d'une période fermée sont réduites (zones rouges).

3.3. Thêta corrigé :

La nouvelle calibration calendar effect a permis de limiter la dépendance au weekend dans la volatilité et par la suite avoir un Thêta qui ne saute pas les vendredis.

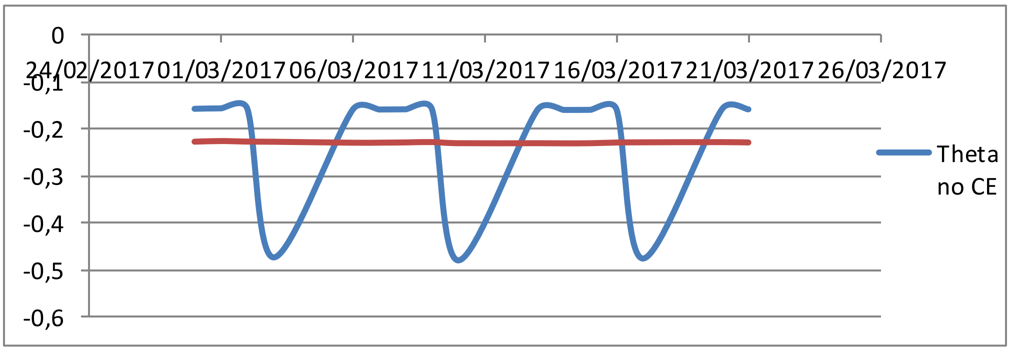
Application

Pour l'exemple du même call qui mature le 15 Mars 2022 avec un Strike $K = 3319.61$ et un taux d'intérêt sans risque de 3% et en utilisant les mêmes données de marché que la section précédente.

Les résultats obtenus en utilisant les différentes conventions des fractions business sont les suivants:

En utilisant la convention 252

Figure N°5 : Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention 252



Source : Bloomberg

Remarque importante :

Le graphe montre une baisse du niveau du Thêta après application de l'ajustement calendar effect, ceci est dû au fait de l'utilisation du même historique de volatilités implicites pour calculer les prix et les Thêtas avec et sans calendar effect ce qui donne des prix différents et par la suite des Thêta différents.

Supposant l'utilisation de la volatilité implicite ${\sigma_{SC}}^{impl}$ pour calculer le prix d'un call de maturité T sans calendar effect à l' instant t alors cette dernière représente la volatilité à injecter dans la formule fermée de BS pour reproduire le prix observé sur le marché à l'instant t et on a :

$$P_{market} = P_{BS}\left({\sigma_{SC}}^{impl}\right)$$

Pour appliquer l'ajustement calendar effect il faut chercher la nouvelle volatilité implicite calendar effect ${\sigma_{CE}}^{impl}$ à utiliser pour limiter la dépendance au weekend et qui reproduit le prix observé sur le marché :

Donc :

$$P_{market} = P_{BS}(\sigma_t(T)) = P_{BS}\left(\sigma_{CE}{}^{impl} \sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T 1_{s\epsilon O}\, ds} \right) = P_{BS}(\sigma_{CE}{}^{impl})$$

Et donc $\sigma_{CE}{}^{impl} < \sigma_{SC}{}^{impl}$ et l'utilisation de l'historique de volatilités $\sigma_{SC}{}^{impl}$ et $\sigma_{CE}{}^{impl}$ pour calculer respectivement le Thêta sans et avec calendar effect donnera le même niveau du Thêta.

Conclusion

En théorie financière, l'anticipation de l'évolution des différents risques en fonction de l'environnement du marché est primordiale. A ce fait une bonne connaissance de la dynamique des grecques comme mesure de risque sur le marché des dérivés s'avère trop nécessaire afin d'éviter des pertes non négligeables.

Avoir des grecques qui sautent constitue toujours une source d'inquiétude pour les traders puisqu'ils vont certainement influencer leurs stratégies de couverture et peuvent causer probablement des pertes non négligeables. Une telle problématique est observée sur le Thêta lors d'un pricing par un modèle de Black & Scholes simple. En effet ce dernier affiche des sauts la veille des jours fermés.

L'objectif de cette étude était de trouver un modèle de volatilité implicite permettant d'éviter la dépendance aux weekends et par la suite éviter les sauts de thêta la veille des jours fermés.

Ce travail nous pousse à avoir beaucoup de réflexions sur la problématique traitée en s'interrogeant sur les limites d'un pricing par le modèle de Black & Scholes simple c'est d'un côté, et d'un autre sur le résultat de la calibration de la volatilité en utilisant d'autres bases de temps business.

ANNEXES

Lemme d'Itô :

Le lemme d'Itô offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS), c'est l'un des grands piliers du calcul stochastique.

Enoncé :

Soit un processus d'Itô (Xt) t, processus stochastique de la forme :

$$X_t = X_0 + \int \mu_s \, ds + \int \sigma_s \, dBs$$

Autrement formulé, on a : $dX_t = \mu_t \, dt + \sigma_t dBt$

Avec μ_t et σ_t deux fonctions aléatoires satisfaisant quelques hypothèses techniques d'adaptation au processus Bt (mouvement brownien).

Si $f(X_t, t)$ est une fonction de classe C^2 (R^2, R), alors la formule d'Itô s'écrit :

$$d\big(f(X_t, t)\big) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t{}^2 dt$$

Formule de Black & Scholes :

Dans le monde risque neutre le prix du call ou du put d'une option européenne en fonction de St et t est donné par :

$$V_t = E\big(e^{-r(T-t)}h(S_T)\big) = E\left(e^{-r(T-t)}h(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})/F_t\right)$$

Prenons le cas du call alors :

$$\begin{aligned} Vt &= E\big(e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+\big) \\ &= E\big(e^{-r(T-t)}(S_T - K)1_{S_T > K}\big) \\ &= e^{-r(T-t)}\left(E\big(S_T 1_{S_T > K}\big) - K \times E\big(1_{S_T > K}\big)\right) \end{aligned}$$

Or

$$E\big(1_{S_T > K}\big) = P(S_T > K) = P\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t) > \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right)$$

Donc

$$E\big(1_{S_T > K}\big) = P\left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}(W_T - W_t) > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) = P(G > -d_2)$$

Car la variable aléatoire $W_T - W_t$ est gaussienne centrée de variance $T - t$.

Avec :

$$G = \frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1) \quad \text{Et} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{St}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Donc

$$P(S_T > K) = P(-G > -d_2) = P(G < d_2) = N(d_2)$$

Et on a :

$$E\left(S_T 1_{S_T>K}\right) = S_t\, E\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}(W_T-W_t)}1_{G>-d_2}\right)$$

Donc :

$$e^{-r(T-t)}\, E\left(S_T 1_{S_T>K}\right) \quad = S_t \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{x>-d_2}\, e^{-\frac{x^2}{2}+\sigma\sqrt{T-t}\,x-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$S_t \int_{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= S_t \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = S_t N(d_1)$$

Les formule fermées de Black & Scholes pour le call et le put sont :

$$C_t = S_t N\,(d1) - K\, e^{-r(T-t)}\, N(d2)$$

$$Pt = K\, e^{-r(T-t)} N\,(-d2) - S_t\, N(-d1)$$

BIBLIOGRAPHIE

Arthur, C. (2006). «Méthodes numériques en finance».

Alexis, F. (2014). «Modèles de Taux, Surface de Volatilité et Introduction au Risque de Crédit».

Bouzia, A. & Cherkaoui, K. (2020). «Les déterminants de la liquidité du marché des actions au Maroc» Revue Française d'Economie et de Gestion «Volume 1 : Numéro 1» pp : 89 – 110.

Francois-Éric, R. & Raymond, T. (2006). «Simulations de la couverture delta et de la couverture delta-gamma d'un portefeuille dans le cadre du modèle de Black et Scholes».

Hull, J. (2014). «Options, Futures and Other Derivative Securities». 9ème édition Pearson.

Peter, T (2012) ; « Calibration de modèles et couverture de produits dérivés.